

Problema :

Se tiene la configuración de la figura 1, donde el cilindro interior, de radio a es un conductor, rodeado de dos cáscaras dieléctricas de radios b y c y con permitividades ϵ_1 y ϵ_2 , y finalmente por una cáscara conductora de radio exterior d . El conductor interior tiene una carga Q_1 y el exterior una carga Q_2 . La longitud de los cilindros es $L \gg d$. Se pide calcular:

- Las densidades, en volumen y superficie, de carga libre
- Las densidades, en volumen y superficie, de carga de polarización.
- El campo eléctrico en todo el espacio
- El potencial electrostático en todo el espacio.

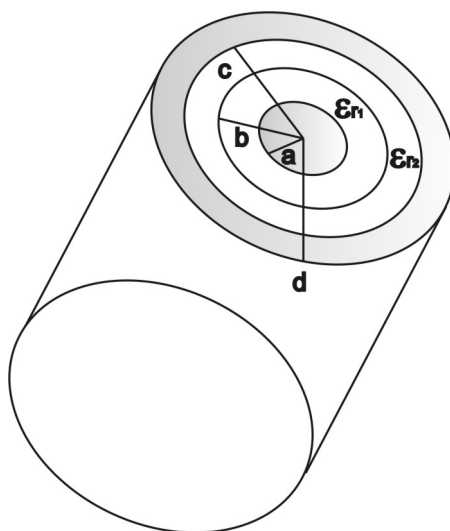


Figura 1:

Calculamos primero las densidades de carga libre. La carga libre se encuentra en los conductores (nada en el enunciado del problema nos indica la existencia de carga libre en los dieléctricos), de modo que solo tendremos densidades superficiales de carga. En el conductor interior la carga total es Q_1 , de manera que la densidad de carga libre en la superficie de radio a será

$$\sigma_a = \frac{Q_1}{2\pi aL}$$

En la cáscara conductora el campo eléctrico es nulo. Entonces, tomando, en la cáscara conductora, una superficie de Gauss cilíndrica concéntrica con los cilindros de la configuración se tendrá

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

o bien

$$0 = \frac{Q_a + Q_c}{\epsilon_0} \implies Q_c = -Q_a = -Q_1$$

Obteniendo luego

$$\sigma_c = -\frac{Q_1}{2\pi cL}$$

En la cáscara conductora la carga es

$$Q_2 = Q_c + Q_d$$

De donde

$$Q_d = Q_2 - Q_c = Q_2 + Q_1$$

de forma que en la superficie exterior se tiene la densidad de carga

$$\sigma_d = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi dL}$$

Ya están calculadas las densidades de carga libre.

Calculamos ahora el campo eléctrico. En todos los casos, al usar superficies de Gauss, estas serán cilíndricas, concéntricas con el resto de los cilindros, y de longitud $L' \ll L$, de manera de poder asegurar que el campo eléctrico es radial y dependiente solo de ρ , con lo cual el flujo del campo eléctrico será distinto de cero solo en las caras laterales del cilindro. Algunas cuentas se repiten en varias oportunidades, de modo que se harán con detalle solo en el primer caso.

- $\rho < a$: Estamos en el interior de un conductor, de manera que $E = 0$
- $a < \rho < b$: Planteando la ley de Gauss para el campo Desplazamiento

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{libre} \implies D(\rho)2\pi L'\rho = \sigma_1 2\pi aL'$$

$$D(\rho) = \frac{\sigma_1 a}{\rho}$$

o bien

$$D(\rho) = \frac{Q_1}{2\pi L\rho}$$

y luego

$$E(\rho) = \frac{D(\rho)}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} L\rho}$$

Se calcula ahora el campo de polarización

$$P(\rho) = D(\rho) - \epsilon_0 E(\rho) = \frac{Q_1}{2\pi L\rho} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right)$$

- $b < \rho < c$: De forma similar al caso anterior resulta

$$D(\rho) = \frac{Q_1}{2\pi L\rho}$$

y luego

$$E(\rho) = \frac{D(\rho)}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} L\rho}$$

$$P(\rho) = D(\rho) - \epsilon_0 E(\rho) = \frac{Q_1}{2\pi L\rho} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right)$$

- $c < \rho < d$: interior de la cáscara conductora, $D = 0$, $E = 0$
- $\rho > d$: planteando el teorema de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \implies E(\rho) 2\pi L' \rho = \frac{\sigma_a 2\pi a L' + \sigma_b 2\pi b L' + \sigma_c 2\pi c L'}{\epsilon_0} =$$

$$= \frac{Q_1 L'}{\epsilon_0 L} - \frac{Q_1 L'}{\epsilon_0 L} + \frac{(Q_1 + Q_2) L'}{\epsilon_0 L}$$

de donde

$$E(\rho) = \frac{Q_1 + Q_2}{2\epsilon_0 \pi L\rho}$$

y

$$D(\rho) = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi L\rho}$$

Finalmente, especificando el carácter vectorial de los campos, se tiene

$$\vec{E}(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < a \\ \frac{Q_1}{2\pi L\epsilon_0 \epsilon_{r1} \rho} \hat{\rho} & \text{si } a < \rho < b \\ \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} L\rho} \hat{\rho} & \text{si } b < \rho < c \\ 0 & \text{si } c < \rho < d \\ \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi \epsilon_0 L\rho} \hat{\rho} & \text{si } \rho > d \end{cases}$$

$$\vec{D}(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < a \\ \frac{Q_1}{2\pi L\rho} \hat{\rho} & \text{si } a < \rho < b \\ \frac{Q_1}{2\pi L\rho} \hat{\rho} & \text{si } b < \rho < c \\ 0 & \text{si } c < \rho < d \\ \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi L\rho} \hat{\rho} & \text{si } \rho > d \end{cases}$$

$$\vec{P}(\rho) = \begin{cases} \frac{Q_1}{2\pi L\rho} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right) \hat{\rho} & \text{si } a < \rho < b \\ \frac{Q_1}{2\pi L\rho} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right) \hat{\rho} & \text{si } b < \rho < c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calculamos ahora el potencial electrostático. Si intentamos definir el punto de referencia del potencial en el infinito, las integrales que se calcularán a continuación divergirán (comprobarlo). Tomamos entonces el cero de potencial en un radio $\rho_0 > d$, de modo que $V(\rho = \rho_0) = 0$.

■ $\rho > d$:

$$V(\rho) - V(\rho_0) = - \int_{\rho_0}^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 L \rho} d\rho = - \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

■ $c < \rho < d$:

$$V(\rho) - V(\rho_0) = - \int_{\rho_0}^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = - \int_{\rho_0}^d \vec{E} \cdot d\vec{\rho} - \int_d^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = - \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{d}{\rho_0}\right) - \int_d^{\rho} \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{r2} L \rho} d\rho =$$

■ $b < \rho < c$:

$$\begin{aligned} V(\rho) - V(\rho_0) &= - \int_{\rho_0}^c \vec{E} \cdot d\vec{\rho} - \int_c^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = - \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{d}{\rho_0}\right) - \int_c^{\rho} \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{r2} L \rho} d\rho = \\ &= - \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{d}{\rho_0}\right) - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{r2} L} \ln\left(\frac{\rho}{c}\right) \end{aligned}$$

■ $a < \rho < b$:

$$\begin{aligned} V(\rho) - V(\rho_0) &= - \int_{\rho_0}^b \vec{E} \cdot d\vec{\rho} - \int_b^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = - \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{d}{\rho_0}\right) - \\ &- \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{r2} L} \ln\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{r1} L} \ln\left(\frac{\rho}{b}\right) \end{aligned}$$

■ $\rho < a$:

$$\begin{aligned} V(\rho) - V(\rho_0) &= - \int_{\rho_0}^a \vec{E} \cdot d\vec{\rho} - \int_a^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{\rho} = \\ &= - \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{d}{\rho_0}\right) - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{r2} L} \ln\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{r1} L} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

Cargas de polarización;

■ En volumen:

$$\rho^{Pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho P_{\rho}) = 0$$

■ En superficie : $\sigma_x^{Pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}_x|_x$

- $\rho = a$

En este caso, $\hat{n}_a = -\hat{\rho} \Rightarrow$

$$\sigma_a^{Pol} = -\frac{Q_1}{2\pi La}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right)$$

- $\rho = b$

Tenemos contribución de los dos dieléctricos: $\sigma_b^{Pol} = \sigma_{b1}^{Pol} + \sigma_{b2}^{Pol}$,
teniendo en cuenta que $\hat{n}_{b1} = \hat{\rho}$ y $\hat{n}_{b2} = -\hat{\rho}$

$$\sigma_b^{Pol} = \frac{Q_1}{2\pi Lb}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right) - \frac{Q_1}{2\pi Lb}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right) = \frac{Q_1}{2\pi Lb}\left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right)$$

- $\rho = c$

En este caso, $\hat{n}_c = \hat{\rho} \Rightarrow$

$$\sigma_c^{Pol} = \frac{Q_1}{2\pi Lc}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right)$$

La carga total de polarización:

$$\begin{aligned} Q^{Pol} &= Q_{Vol}^{Pol} + Q_{Sup}^{Pol} = 0 + \sigma_a^{Pol} Sup(a) + \sigma_b^{Pol} Sup(b) + \sigma_c^{Pol} Sup(c) = \\ &= -\frac{Q_1}{2\pi La}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right)2\pi aL + \frac{Q_1}{2\pi Lb}\left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right)2\pi bL + \frac{Q_1}{2\pi Lc}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right)2\pi cL = 0 \end{aligned}$$

Verificamos que la carga total de polarización es nula, como debe ser.